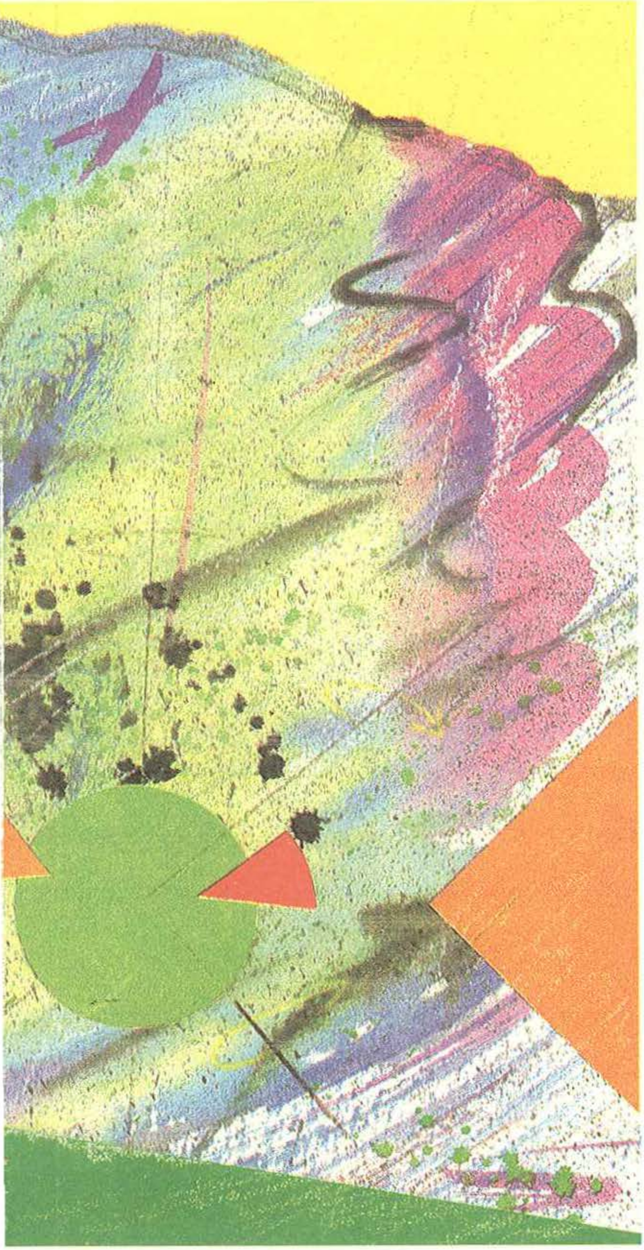
epsilon



REVISTA DE LA S.A.E.M. «THALES» / Nº 43-44 / VOLUMEN 15(1-2)

epsilon
REVISTA DE LA SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACION MATEMATICA "THALES"

consejo de redacción

Edita
Sociedad Andaluza de Educación
Matemática «Thales»
Facultad de Matemáticas
Apartado 1160 - 41080 Sevilla

Imprime
Grafitrés, S.L.
Cristóbal Colón, 12 - Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

I.S.S.N.
1131-9321

Período
1º y 2º Cuatrimestre 1999

Suscripción
ESPAÑA, 4.000 PTS.
EXTRANJERO, 40 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

INFINITÉSIMOS DESDE LOS POLÍGONOS REGULARES

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemáticas. I.E.S. Bonifacio Sotos.
Casas Ibáñez. Albacete.

Gema Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas. I.B. Fernando de los Ríos.
Quintanar del Rey. Cuenca.

En este trabajo proponemos un método distinto al usual para deducir dos de los principales infinitésimos equivalentes. La riqueza del método estriba en que obtenemos los mencionados resultados analíticos a partir de un razonamiento geométrico sobre polígonos regulares. Además, de un modo indirecto, usamos un potente procedimiento para calcular aproximaciones por defecto y por exceso del número π.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los *infinitésimos equivalentes o funciones equivalentes en un punto* se viene llevando a cabo en los cursos: 3º B.U.P y C.O.U (opción «científico-tecnológica»), y 1º y 2º de los nuevos bachilleratos L.O.G.S.E. de las modalidades «tecnológico» y «ciencias de la naturaleza y la salud». Su aplicación al cálculo de límites indeterminados, y en consecuencia al estudio de la continuidad de funciones confirman su importancia.

Empecemos recordando que una función f definida en un entorno (o al menos en un entorno reducido) de un punto x_0 (que puede ser real, $+\infty$, ó $-\infty$) se dice que es un infinitésimo en dicho punto si se verifica que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Por otra parte (ver pág. 148 de la referencia bibliográfica [4]) que dadas f y g dos funciones reales definidas en un entorno (o al menos en un entorno reducido) de un punto x_0 (este punto puede ser real, $+\infty$ ó $-\infty$), entonces se dice que f y g son funciones equivalentes o infinitésimos equivalentes en x_0 cuando existe otra función h definida en un entorno (o en un entorno reducido) de x_0, tal que:

$$f(x) = g(x)h(x) \quad y \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = 1$$

Si la función g no se anula en ningún punto de algún entorno reducido de x_0 entonces la definición anterior significa que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Tradicionalmente el desarrollo de este tema pasa obligatoriamente por la demostración de las más destacadas equivalencias de infinitésimos:

$$\begin{array}{lll} \sin x \cong x & \text{si} & x \to 0 \\ \tan x \cong x & \text{si} & x \to 0 \end{array}$$

es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

la cual está siempre basada en la prueba inicial de la desigualdad:

$$\sin x < x < \tan x \qquad (2)$$

a través de la visión gráfica de los miembros de dicha inecuación en la circunferencia goniométrica, para luego dividiendo por sin x (tan x) cada miembro de (2) obtener la primera (segunda) identidad de (1) tomando límites y usando el criterio del emparedado.

2. NUESTRA PROPUESTA: ENFOQUE LINEAL

Siguiendo la línea de otros trabajos anteriores (ver por ejemplo [3] de la bibliografía), en que damos pruebas alternativas de resultados clásicos, proponemos un estudio distinto para llegar a la misma conclusión, pero que pensamos es más rico, ya que está basado en una bella idea clásica desarrollada por Arquímedes (ver [1] y [2]), además hace uso de la tan olvidada Geometría en los planes de Enseñanza Media, y de paso nos brinda la oportunidad en su análisis de explicar un procedimiento numérico para aproximar el número π. Por toda esta rica travesía a lo largo de diversos campos matemáticos y sobre todo por su aceptación ya comprobada en el aula pensamos que resulta interesante y atractiva tanto para profesores como alumnos.

La idea consiste en construir una sucesión de polígonos inscritos (circunscritos) a una circunferencia; entonces es geométricamente claro que si aumentamos más y más el número de lados de dichos polígonos, éstos acabarán por «confundirse» con la circunferencia de modo que se tendrá:

$$\textbf{Perímetro políg. inscr.``n'' lados} \leq \textbf{Long. circunf.} \leq \textbf{Perímetro políg. circunscr.``n'' lados}$$

Llamando R al radio de la circunferencia, esta última inecuación doble puede reescribirse:

$$\frac{1}{2R}\,\textbf{(Perímetro políg. inscr.``n'' lados)} \leq \pi \leq \frac{1}{2R}\,\textbf{(Perímetro políg. circunscr.``n'' lados)} \tag{3}$$

Aproximación por defecto

Denotando por "P" el perímetro del polígono regular inscrito de "n" lados de longitud "L", es claro que P = nL y de la figura 1 se deduce:

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{L}{2R} \Rightarrow L = 2R\sin\frac{\pi}{n} \tag{4}$$

entonces usando (4) en (3) obtenemos:

$$\pi \cong \frac{1}{2R}\,Ln = n\sin\frac{\pi}{n}$$

Si "n" crece, la aproximación es mejor pues el polígono se aproxima más a una circunferencia por lo que desde un punto de vista intuitivo podemos aceptar que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} \tag{5}$$

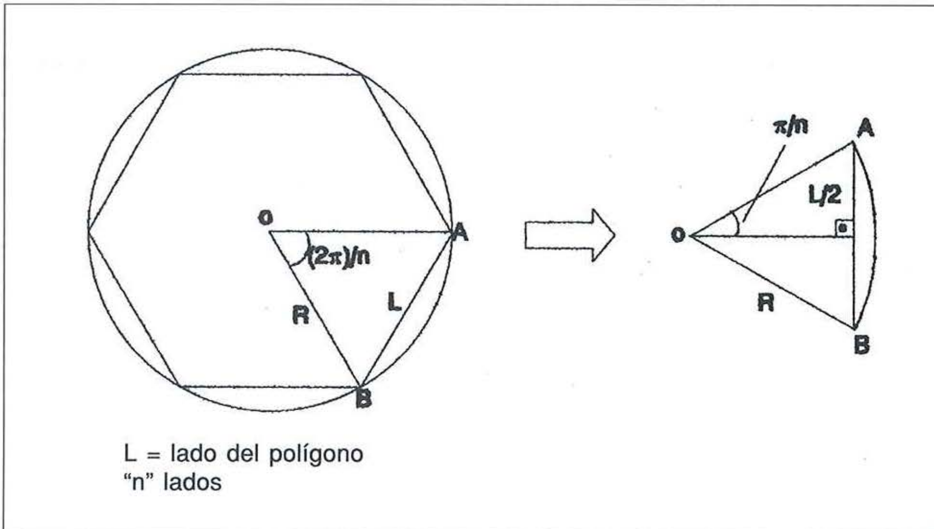


FIGURA 1. APROXIMACIÓN POR DEFECTO

Además, observar que la sucesión $\{n \sin \dfrac{\pi}{n}\}_{n\geq 3}$ es creciente y acotada superiormente por π, así podemos asegurar:

$$n \sin \frac{\pi}{n} \leq \pi \quad \forall n \geq 3$$

Para n = 10000 se obtiene la siguiente aproximación por defecto del número irracional π: $\pi = 3.1415926019$, mientras que el valor exacto es $\pi = 3.1415926535...$ por lo que la aproximación se realiza con un error inferior a 10^{-7}.

Aproximación por exceso

Denotando por "P" el perímetro del polígono regular circunscrito de "n" lados, de longitud "L", es claro que P = nL, y de la figura 2 se deduce:

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{L}{2R} \Rightarrow L = 2R \tan \frac{\pi}{n}$$

entonces usando esto en (3) obtenemos:

$$\pi \cong \frac{1}{2R} Ln = n \tan \frac{\pi}{n}$$

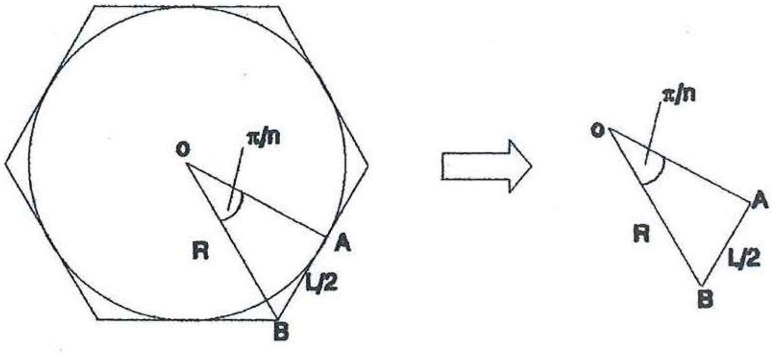


FIGURA 2. APROXIMACIÓN POR EXCESO

Si "n" crece, la aproximación es mejor pues el polígono se aproxima más a una circunferencia por lo que desde un punto de vista intuitivo podemos aceptar que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n \tan\frac{\pi}{n} \tag{6}$$

Además, como la sucesión $\{n \tan\frac{\pi}{n}\}_{n\geq 3}$ es monótona decreciente y está acotada inferiormente por π, así podemos asegurar:

$$\pi \leq n \tan\frac{\pi}{n} \qquad \forall\, n \geq 3$$

Para $n = 10000$ se obtiene la siguiente aproximación por exceso del número π: $\pi = 3.1415927569$, por lo que la aproximación se realiza con error inferior a 10^{-6}.

Observar que desde (5) y (6) se deduce:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{\pi}{n} = \pi = \lim_{n\to\infty} n \tan\frac{\pi}{n} \tag{7}$$

entonces de la primera igualdad de (7) obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \sin\frac{\pi}{n} = 1$$

basta realizar el cambio de variable $x = \dfrac{\pi}{n}$, para obtener nuestro objetivo inicial: la primera identidad de (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Y del mismo modo ahora ya es inmediato deducir desde (7) la segunda identidad de (1).

Notar que implícitamente, y desde un punto de vista geométrico hemos definido una sucesión de intervalos encajados,

$$\{[n \sin\frac{\pi}{n}, n \tan\frac{\pi}{n}]\}_{n\geq 3}$$

que definen al número π.

3. EXTENSIÓN DE LA PROPUESTA: CASO CUADRÁTICO

Sobre un argumento basado en una magnitud lineal, el perímetro de una circunferencia, hemos probado las identidades dadas en (1) sobre infinitésimos equivalentes. Sin embargo, y para mostrar la riqueza de esta nueva propuesta, basándonos en una magnitud cuadrática, el área de un círculo, llegaremos a probar de otro modo (1). Siguiendo exactamente la misma idea del apartado anterior se deduce:

Área políg. inscr. "n" lados ≤ Área circunf. ≤

Área políg. circunscr. "n" lados

luego

$$\frac{1}{R^2}(\textbf{Área políg. inscr. "n" lados}) \leq \pi \leq \frac{1}{R^2}(\textbf{Área políg. circunscr. "n" lados}) \qquad (8)$$

Aproximación por defecto

Denotando por "A" el área del polígono regular inscrito de "n" lados, de longitud "L", perímetro "P" y apotema "H", sabemos que $A = (1/2)PH$, esto es, desde la figura 1 y usando la igualdad (4)

$$A = (1/2)nLR\cos\frac{\pi}{n} = (1/2)n2R\sin(\frac{\pi}{n})R\cos(\frac{\pi}{n}) = nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

y utilizando (8), así como la fórmula del seno del ángulo doble:

$$\pi \cong \frac{1}{R^2}nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

AU

Razonando como antes:

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

y

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \leq \pi \quad \forall n \geq 3$$

Para n = 10000 obtenemos la siguiente aproximación por defecto del número π, $\pi = 3.1415924468$. Notar que la aproximación obtenida en el caso cuadrático es peor que la conseguida en el caso lineal.

De la última igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n} = 1$$

y realizando el cambio de variable $x = \frac{2\pi}{n}$ se deduce la primera parte de (1).

Del mismo modo, y realizando una aproximación por exceso deducimos la segunda identidad de (1).

Para finalizar tan sólo deseamos subrayar la riqueza matemática que despliega este enfoque alternativo cuando se pone en práctica en el aula. Con él se combina el trabajo en dos campos matemáticos que casi siempre les presentamos a los alumnos de un modo independiente: el Análisis y la Geometría. Los alumnos manejan al mismo tiempo, conceptos tan importantes como variados. Así por ejemplo, trabajan con el perímetro y área de un polígono regular, perímetro de una circunferencia y área de un círculo. Se refuerza la importancia del número pi en las matemáticas. Se trabaja la estimación y aproximación, así como el cálculo de errores. Las funciones equivalentes. El concepto de límite se estudia de un modo muy distinto al que usualmente les presentamos al trabajar con funciones: se le da un atractivo enfoque geométrico,... llegando así a comprender cuan fecunda resulta la simbiosis Geometría-Análisis.

BIBLIOGRAFÍA

[1] APOSTOL, T.M. (1989): *Calculus* volumen I, 2ª edición, Barcelona (España), Ed. Reverté, 3-4.
[2] BOYER, C.B. (1987): *Historia de las Matemáticas*, 1ª edición, Madrid (España), Ed. Alianza Universidad Textos.
[3] CORTÉS LÓPEZ, J.C. (1997): «Una demostración del teorema del coseno». *Revista de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, nº 47, 45-46 .
[4] FERNÁNDEZ VIÑA, J.A. (1981):- *Lecciones de Análisis Matemático I*, 2ª edición, Madrid (España), Ed. Tecnos.